Análisis Complejo: 1.3 Funciones Especiales

Presentaciones de clase

Universidad de Murcia

Curso 2011-2012

Objetivos

Objetivos

Objetivos

- Extender la función factorial a $\mathbb{C}$: función Γ.

Objetivos

Objetivos

- Extender la función factorial a $\mathbb{C}$: función Γ.
- Obtener distintas expresiones para la función Γ así como su relación con otras funciones clásicas.

Objetivos

- Extender la función factorial a $\mathbb{C}$: función Γ.
- Obtener distintas expresiones para la función Γ así como su relación con otras funciones clásicas.
- Introducir la función ζ de Riemann.

Proposición

La función dada por

$$\Gamma(z) := \frac{1}{z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{n}) e^{-\frac{z}{n}}} = \frac{1}{z} e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{n})^{-1} e^{\frac{z}{n}},$$

es meromorfa en $\mathbb{C}$, tiene polos simples en $\{0, -1, -2, \dots\}$ siendo $\mathrm{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$, para $n = 0, -1, -2, \dots$ y satisface la ecuación funcional:

- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.
- $\Gamma(1) = 1$.

Fórmula de los complementos y de Gauss

Proposición: Fórmula de Gauss

$$\Gamma(z) = \lim_n \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\dots(z+n)},$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Fórmula de los complementos y de Gauss

Proposición: Fórmula de Gauss

$$\Gamma(z) = \lim_n \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)},$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$.

Proposición: Fórmula de los complementos

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$.

Fórmula de los complementos y de Gauss

Proposición: Fórmula de Gauss

$$\Gamma(z) = \lim_n \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\dots(z+n)},$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Proposición: Fórmula de los complementos

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Observación

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

La función Γ como una integral

Ejercicio

Pruébese que:

- La función $\varphi_1(z) := \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ está definida para cada $z \in \mathbb{C}$ y que $\varphi_1 \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$.
- La función $\varphi_2(z) := \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt$ está definida para cada $z \in \mathbb{C}$, con $\operatorname{Re} z > 0$ y que $\varphi_2 \in \mathscr{H}(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\})$.

Proposición

Para $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z > 0$ se tiene la igualdad

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Aspectos a estudiar para la función ζ

Aspectos a estudiar

- Definición de la función ζ.
- Factorización de Euler de la función ζ.
- Relación entre las funciones Γ y ζ: extensión de ζ a una función meromorfa en $\mathbb{C}$.
- Ecuación funcional Riemann: ceros triviales de la función ζ.
- La conjetura de Riemann.

Aspectos a estudiar para la función ζ

Aspectos a estudiar

- Definición de la función ζ.
- Factorización de Euler de la función ζ.
- Relación entre las funciones Γ y ζ: extensión de ζ a una función meromorfa en $\mathbb{C}$.
- Ecuación funcional Riemann: ceros triviales de la función ζ.
- La conjetura de Riemann.

Definición

La función ζ de Riemann, se define en el semiplano $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ mediante la suma de la serie

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^z.$$

Holomorfia

La serie que define ζ converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$, y así, ζ es una función holomorfa en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$.

Primeras propiedades de la función ζ

Holomorfia

La serie que define ζ converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$, y así, ζ es una función holomorfa en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$.

Proposición - Euler

Si $(p_n)_n$ es la sucesión de los números primos $(2, 3, 5, 7, \dots)$ y $\operatorname{Re} z > 1$, entonces se verifica que

$$\zeta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-z}},$$

donde el producto converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$.

Extensión de la función ζ

A partir de aquí comentamos (sin demostración) como se puede extender la función ζ a una función meromorfa en $\mathbb{C}$, llegando a plantear la conjetura de Riemann.

A partir de aquí comentamos (sin demostración) como se puede extender la función ζ a una función meromorfa en $\mathbb{C}$, llegando a plantear la conjetura de Riemann.

Ejercicio (PRIMER PASO)

La integral $F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^z}{e^t - 1} dt$ define una función holomorfa en el semiplano $\Omega = \{z : \mathrm{Re}\, z > 1\}$. En concreto:

i) La integral $F_0(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$ converge uniformemente sobre compactos en Ω y define una función holomorfa.

ii) La integral $F_1(z) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$ converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$ donde define una función entera.

Extensión de la función ζ

Proposición (SEGUNDO PASO)

Si $\operatorname{Re} z > 1$ se verifica

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$$

Extensión de la función ζ

Proposición (SEGUNDO PASO)

Si $\operatorname{Re} z > 1$ se verifica

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$$

Ejercicio (TERCER PASO)

La función $F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t-1} dt$ definida y holomorfa en $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$ se puede prolongar a una (única) función $\hat{F} \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ con polos simples en $\{1, 0, -1, -3, -5, \cdots - (2n+1), \dots\}$.

Extensión de la función ζ

Proposición (SEGUNDO PASO)

Si $\operatorname{Re} z > 1$ se verifica

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\,dt$$

Ejercicio (TERCER PASO)

La función $F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt$ definida y holomorfa en $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$ se puede prolongar a una (única) función $\hat{F} \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ con polos simples en $\{1, 0, -1, -3, -5, \cdots -(2n+1), \dots\}$.

Teorema (CUARTO PASO)

La función ζ se puede prolongar analíticamente a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con un único polo simple en $z = 1$ y ceros en los puntos $\{-2n : n \in \mathbb{N}\}$ que satisface la *Ecuación Funcional de Riemann*

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\zeta(1-z)\sin\frac{\pi z}{2}.$$

Conjetura de Riemann

- Como consecuencia de la Ecuación Funcional de Riemann, la función ζ tiene ceros triviales en $\{-2, -4, -6, \dots\}$.

Conjetura de Riemann

- Como consecuencia de la Ecuación Funcional de Riemann, la función ζ tiene ceros triviales en $\{-2, -4, -6, \dots\}$.
- La función ζ no tiene ceros en $\mathrm{Re}\, z > 1$ (utilizar la formula de Euler).

Conjetura de Riemann

- Como consecuencia de la Ecuación Funcional de Riemann, la función ζ tiene ceros triviales en $\{-2, -4, -6, \dots\}$.
- La función ζ no tiene ceros en $\operatorname{Re} z > 1$ (utilizar la formula de Euler).
- El gran problema era/es estudiar los ceros de ζ en la banda crítica $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$.

Conjetura de Riemann

- Como consecuencia de la Ecuación Funcional de Riemann, la función ζ tiene ceros triviales en $\{-2,-4,-6,\dots\}$.
- La función ζ no tiene ceros en $\mathrm{Re}\, z > 1$ (utilizar la formula de Euler).
- El gran problema era/es estudiar los ceros de ζ en la banda crítica $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1\}$.
- En 1859 Riemann afirmó que la función ζ tiene infinitos ceros en la banda B y que el número de ceros $N(T)$ en $B \cap \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Im z \leq T\}$ verifica

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + log 2\pi}{2\pi} T + O(\log T)$$

Conjetura de Riemann

- Como consecuencia de la Ecuación Funcional de Riemann, la función ζ tiene ceros triviales en $\{-2,-4,-6,\dots\}$.
- La función ζ no tiene ceros en $\mathrm{Re}\, z > 1$ (utilizar la formula de Euler).
- El gran problema era/es estudiar los ceros de ζ en la banda crítica $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1\}$.
- En 1859 Riemann afirmó que la función ζ tiene infinitos ceros en la banda B y que el número de ceros $N(T)$ en $B \cap \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Im z \leq T\}$ verifica

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + log 2\pi}{2\pi} T + O(\log T)$$

- Hadamard demostró la primera afirmación en 1959. Mangolet demostró la segunda en 1905.

Conjetura de Riemann

- Como consecuencia de la Ecuación Funcional de Riemann, la función ζ tiene ceros triviales en $\{-2, -4, -6, \dots\}$.
- La función ζ no tiene ceros en $\mathrm{Re}\, z > 1$ (utilizar la formula de Euler).
- El gran problema era/es estudiar los ceros de ζ en la banda crítica $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 \le \mathrm{Re}\, z \le 1\}$.
- En 1859 Riemann afirmó que la función ζ tiene infinitos ceros en la banda B y que el número de ceros $N(T)$ en $B \cap \{z \in \mathbb{C} : 0 \le \Im z \le T\}$ verifica

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + log 2\pi}{2\pi} T + O(\log T)$$

- Hadamard demostró la primera afirmación en 1959. Mangolet demostró la segunda en 1905.
- Riemann formuló la conjetura de que todos los ceros de ζ en la banda crítica están concentrados en la recta $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$.

Conjetura de Riemann

- Como consecuencia de la Ecuación Funcional de Riemann, la función ζ tiene ceros triviales en $\{-2,-4,-6,\dots\}$.
- La función ζ no tiene ceros en $\mathrm{Re}\, z > 1$ (utilizar la formula de Euler).
- El gran problema era/es estudiar los ceros de ζ en la banda crítica $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 \le \mathrm{Re}\, z \le 1\}$.
- En 1859 Riemann afirmó que la función ζ tiene infinitos ceros en la banda B y que el número de ceros $N(T)$ en $B \cap \{z \in \mathbb{C} : 0 \le \Im z \le T\}$ verifica

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + log 2\pi}{2\pi} T + O(\log T)$$

- Hadamard demostró la primera afirmación en 1959. Mangolet demostró la segunda en 1905.
- Riemann formuló la conjetura de que todos los ceros de ζ en la banda crítica están concentrados en la recta $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$.
- Hardy demostró en 1915 que ζ tiene infinitos ceros en $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$.

Conjetura de Riemann

- Como consecuencia de la Ecuación Funcional de Riemann, la función ζ tiene ceros triviales en $\{-2, -4, -6, \dots\}$.
- La función ζ no tiene ceros en $\operatorname{Re} z > 1$ (utilizar la formula de Euler).
- El gran problema era/es estudiar los ceros de ζ en la banda crítica $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$.
- En 1859 Riemann afirmó que la función ζ tiene infinitos ceros en la banda B y que el número de ceros $N(T)$ en $B \cap \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Im z \leq T\}$ verifica

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + log 2\pi}{2\pi} T + O(\log T)$$

- Hadamard demostró la primera afirmación en 1959. Mangolet demostró la segunda en 1905.
- Riemann formuló la conjetura de que todos los ceros de ζ en la banda crítica están concentrados en la recta $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$.
- Hardy demostró en 1915 que ζ tiene infinitos ceros en $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$.
- En 1975 Levison demostró que $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ contiene asintóticamente más de $1/3$ de los ceros que ζ tiene en la banda B.

Conjetura de Riemann

- Como consecuencia de la Ecuación Funcional de Riemann, la función ζ tiene ceros triviales en $\{-2,-4,-6,\dots\}$.
- La función ζ no tiene ceros en $\operatorname{Re} z > 1$ (utilizar la formula de Euler).
- El gran problema era/es estudiar los ceros de ζ en la banda crítica $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.

1 PROBLEMA 1 MILLÓN: http://www.claymath.org/millennium/

- La conjetura de Riemann es uno de los problemas más famosos de las matemáticas que aún sigue abierto.
- WIKIPEDIA: The Riemann hypothesis is one of the most important open problems of contemporary mathematics; a $1,000,000 prize has been offered by the Clay Mathematics Institute for a proof. Most mathematicians believe the Riemann hypothesis to be true.

- Hardy demostró en 1915 que ζ tiene infinitos ceros en $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$.
- En 1975 Levison demostró que $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ contiene asintóticamente más de 1/3 de los ceros que ζ tiene en la banda B.

Los 7 problemas del millón

Clay Mathematics Institute

Dedicated to increasing and disseminating mathematical knowledge

HOME | ABOUT CMI | PROGRAMS | NEWS & EVENTS | AWARDS | SCHOLARS | PUBLICATIONS

Millennium Problems

In order to celebrate mathematics in the new millennium, The Clay Mathematics Institute of Cambridge, Massachusetts (CMI) has named seven *Prize Problems*. The Scientific Advisory Board of CMI selected these problems, focusing on important classic questions that have resisted solution over the years. The Board of Directors of CMI designated a $7 million prize fund for the solution to these problems, with $1 million allocated to each. During the Millennium Meeting held on May 24, 2000 at the Collège de France, Timothy Gowers presented a lecture entitled *The Importance of Mathematics*, aimed for the general public, while John Tate and Michael Atiyah spoke on the problems. The CMI invited specialists to formulate each problem.

One hundred years earlier, on August 8, 1900, David Hilbert delivered his famous lecture about open mathematical problems at the second International Congress of Mathematicians in Paris. This influenced our decision to announce the millennium problems as the central theme of a Paris meeting.

The rules for the award of the prize have the endorsement of the CMI Scientific Advisory Board and the approval of the Directors. The members of these boards have the responsibility to preserve the nature, the integrity, and the spirit of this prize.

Paris, May 24, 2000

Please send inquiries regarding the Millennium Prize Problems to prize.problems@claymath.org.

- Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture
- Hodge Conjecture
- Navier-Stokes Equations
- P vs NP
- Poincaré Conjecture
- Riemann Hypothesis
- Yang-Mills Theory

- Rules
- Millennium Meeting Videos

Clay Mathematics Institute y la Conjetura de Riemann

Clay Mathematics Institute

Dedicated to increasing and disseminating mathematical knowledge

HOME | ABOUT CMI | PROGRAMS | NEWS & EVENTS | AWARDS | SCHOLARS | PUBLICATIONS

Riemann Hypothesis

Some numbers have the special property that they cannot be expressed as the product of two smaller numbers, e.g., 2, 3, 5, 7, etc. Such numbers are called *prime* numbers, and they play an important role, both in pure mathematics and its applications. The distribution of such prime numbers among all natural numbers does not follow any regular pattern, however the German mathematician G.F.B. Riemann (1826 - 1866) observed that the frequency of prime numbers is very closely related to the behavior of an elaborate function

$$\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + \ldots$$

called the *Riemann Zeta function*. The Riemann hypothesis asserts that all *interesting* solutions of the equation

$$\zeta(s) = 0$$

lie on a certain vertical straight line. This has been checked for the first 1,500,000,000 solutions. A proof that it is true for every interesting solution would shed light on many of the mysteries surrounding the distribution of prime numbers.

- The Millennium Problems
- Official Problem Description — Enrico Bombieri
- Problems of the Millennium: The Riemann Hypothesis (2004) — Peter Sarnak
- Lecture by Jeff Vaaler at the University of Texas (video)
- Facsimile of Riemann's 1859 manuscript